

# САМООРГАНІЗАЦІЯ НЕСТІЙКОЇ СИСТЕМИ ЗА БІФУРКАЦІЄЮ ХОПФА

О.І.ОЛЕМСКОЙ, І.О.ШУДА, В.О.ХАРЧЕНКО

UDC № УДК 539.2  
© 2003

Сумський державний університет  
(Вул. Римського-Корсакова, 2, Суми 044007)

Розглянуто самоорганізацію синергетичної системи, що піддається збуренням типу універсальної деформації складки. Показано, що при спеціальному виборі параметрів нестійкої системи можливим стає виникнення стабільних станів у наслідок біфуркації Хопфа, результатом якої є утворення вироджених граничних циклів. Одержано відповідні біфуркаційні та фазові діаграми. Виявлено умови утворення стійкого та нестійкого фокусів.

ні рідини їх роль відіграють тиск/об'єм та температура/ентропія). Основною особливістю термодинамічної схеми є те, що термостат може впливати на виділену підсистему, але вона (в силу своєї малості) не змінює його стан. За таких умов вплив термостата приводить до переходу системи у локальний мінімум ефективного потенціалу, що відповідає упорядкованому станові [4]. Така ситуація реалізується у разі, коли час релаксації параметра порядку набагато перевищує характерні масштаби зміни спряженого поля та керуючого параметра [5].

## 1. Вступ

Добре відомо, що поведінка великих ансамблів об'єктів (складних систем), які володіють запасами внутрішньої енергії, виявляє загальні закономірності — не залежно від того, відносяться ці об'єкти до живої чи не живої природи [1–3]. Так, спостереження за переміщенням піску у барханах пустині або виникнення снігових лавин приводить до відчуття, що за цими процесами криється розумний початок типу *Океану* у "Солярісі" А.А. Тарковського. Такі ж відчуття виникають і при спостереженні за представниками неживої природи, не наділеної розумом, — колонії мурах, рою бджіл, пташиної зграї і т. ін. З іншого боку, дії натовпу людей, кожна з яких наділена інтелектом, часто приводять до думки про їх нерозумність (найбільш яскравими носіями такої поведінки є гурти спортивних фанатів). Особливе місце у колі вказаних явищ посідає поведінка економічних систем, де конструктивні дії величезної маси учасників процесу можуть приводити до спонтанних фінансових крахів, катастрофічного розподілу засобів та ін. До подібних проблем приводять також дослідження переходів від неживого до живого, соціальних явищ, психіки людини і багато іншого.

Вказані проблеми, що зводяться до самоорганізації складних систем, є предметом міждисциплінарного наукового напрямку, який отримав назву *синергетика* (див. книги [1–3] і посилання в них). Найпростішим фізичним прикладом самоорганізації є фазові переходи типу кипіння рідини. Їхній опис ґрунтується на термодинамічній схемі, в рамках якої із великого термостата виділяється мала підсистема, стан якої задається *параметром порядку*. Термостат впливає на стан підсистеми через зміни механістичного і термічного параметрів стану, які зводяться до *поля, спряженого параметра порядку*, і *керуючого параметра* (при кипін-

Зовсім інша картина спостерігається у процесі самоорганізації, де у термостаті неможливо виділити малу підсистему. У зв'язку з цим усі степені свободи — параметр порядку, спряжене поле та керуючий параметр — набувають рівноправного характеру. Найпопулярнішим прикладом такого роду є спонтанне випромінювання лазера, де вказані величини зводяться до напруги індукованого поля, електричної поляризації середовища та інверсної заселеності електронних рівнів (див. [1]). В силу співвимірності з термостатом система, що самоорганізується, здобуває відкритий характер, і її опис потребує самоузгодженого представлення еволюції параметра порядку, спряженого поля та керуючого параметра. Найскладніша картина, що не піддається інтерпретації мовою ефективного потенціалу, реалізується при співвимірності часових масштабів, коли зростання зовнішнього впливу переводить систему до режиму детермінованого хаосу, який відображається виникненням дивного атратора [6–10].

Найпоширеним прикладом самоорганізації є хімічна реакція Белоусова–Жаботинського, при якій за достатньо великий час періодично пробігає хвиля, що змінює один колір рідини на інший. Оскільки реакція проходить при високих температурах, то така поведінка означає, що молекули рідини, які хаотично рухаються, періодично включаються у самоузгоджений процес, що швидко розвивається по об'єму, змінюючи колективну поведінку системи. Подібні зміни колективної поведінки спостерігаються при виникненні смерчів, у течіях океану та циклонах, у поведінці клітин організму при морфогенезі і т. ін.

Не дивлячись на таке широке розповсюдження, у теперішній час відсутня мікроскопічна картина самоорганізації, оскільки вона потребує розуміння механізмів

процесу, які у кожному частинному випадку мають різну природу. Так, для реакції Белоусова–Жаботинського недостатньо відомі деталі проміжних реакцій, їх константи, умови вибору реагентів і т. ін. З іншого боку, можливість появи коливного режиму впливає вже із розгляду простих моделей. У зв'язку з цим виникає питання: чому ці моделі дозволяють пояснити таке складне колективне явище як самоорганізація? Відповідь на це питання полягає у тому, що множина можливих степенів свободи складної системи розділяється на два класи — нескінчену множину *мікроскопічних* степенів і невелике число *макроскопічних* (для позначення останніх прийнятий термін *гідродинамічні моди*). Згідно синергетичному принципу підпорядкування [1], у ході еволюції гідродинамічні моди подавляють поведінку мікроскопічних степенів свободи, повністю визначаючи картину самоорганізації. У результаті колективна поведінка системи задається декількома параметрами, які представляють амплітуди гідродинамічних мод. З іншого боку, у процесі самоорганізації нерівноважної системи принципову роль повинна відігравати дисипація, яка обумовлена процесами дифузії, в'язкості і теплопровідності, що забезпечують перехід у стаціонарний стан.

Подана робота присвячена дослідженню автохвильового режиму самоорганізації синергетичної системи типу реакції Белоусова–Жаботинського. Для визначеності ми досліджуємо картину періодично модульованого лазерного випромінювання [11], коли система переходить до стаціонарного стану, який характеризується утворенням стійкого автохвильового процесу і відповідає граничному циклу [12]. Типовим прикладом такого процесу є утворення просторово–часових структур у системі, що описується моделлю брюсселятора [13].

Оскільки зазначений режим виникає завдяки зовнішньому впливу на систему, що самоорганізується, то постає питання: який має бути характер такого впливу для забезпечення переходу системи у режим граничного циклу, що відповідає біфуркації Хопфа? Відповідь на таке питання дає використання теорії катастроф, яке дозволяє описати якісно різні ситуації за рахунок моделювання потенціалу зовнішнього впливу універсальними деформаціями типу складки, зборки та ластівчиного хвоста [14].

Підґрунтям нашого дослідження є система Лоренця [15], яка дозволяє найпростішим чином подати ефект самоорганізації [16]. Розділ 2 присвячено формулюванню задачі, що дозволяє перейти від стандартної форми рівнянь Лоренця до системи двох диференціальних рівнянь, яка описує процес самоорганізації із утворенням граничного циклу. У третьому розділі ми подаємо основні формули, що дозволяють описати самоорганізацію, яка є результатом біфуркації народження грани-

чного циклу [12]. У заключенні (розділ 4) наводиться кількісний розгляд найпростішого випадку деформації типу складки. Виявляється, що у такому випадку, на відміну від стандартної ситуації, граничний цикл утворюється із нестійкого стану.

## 2. Модель

На відміну від оригінальної роботи Лоренця [15], де роль основних змінних відігравали швидкість конвективного потоку  $X$ , різниця температур між зустрічними потоками  $Y$  та відхилення градієнта температури  $Z$  від сталого значення при фізичному описі системи, що самоорганізується, зручно використати параметр порядку, спряжене йому поле та керуючий параметр [3]. Згідно Хакену [1], при феноменологічному описанні спонтанного випромінювання лазера параметр порядку зводиться до напруженості електричного поля випромінювання  $E \propto X$ , роль спряженого поля відіграє поляризація активного середовища  $P \propto Y$ , а керуючий параметр  $S \equiv S_e - Z$  відповідає інверсній заселеності електронних рівнів ( $S_e$  — ступінь зовнішньої накачки). В результаті система Лоренця подається рівняннями

$$\begin{cases} \tau_E \dot{E} = -E + g_E P, \\ \tau_P \dot{P} = -P + g_P E S, \\ \tau_S \dot{S} = (S_e - S) - g_S E P, \end{cases} \quad (1)$$

де часові масштаби еволюції задаються величинами  $\tau_E$ ,  $\tau_P$  та  $\tau_S$ . Відповідні інтенсивності зворотніх зв'язків  $g_E$ ,  $g_P$  та  $g_S$  є суто позитивними. Характерно, що напруженість поля лінійним чином пов'язана з поляризацією середовища, в той час як еволюція поляризації та заселеності рівнів задається нелінійними складовими, причому зростання поляризації при взаємодії напруженості поля та інверсної заселеності є причиною самоорганізації. Такий позитивний зворотній зв'язок компенсується негативним у третьому рівнянні, що забезпечується взаємодією напруженості та поляризації і приводить до зменшення значення інверсної заселеності у відповідності з принципом Ле–Шательє.

Для дослідження системи (1) зручно перейти до безрозмірених величин, вимірюючи час  $t$ , напруженість  $E$ , поляризацію  $P$  та інверсну заселеність  $S$  у масштабах

$$\begin{aligned} \tau_E, \quad E_s &= (g_P g_S)^{-1/2}, \\ P_s &= (g_E^2 g_P g_S)^{-1/2}, \quad S_s = (g_E g_P)^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тоді система Лоренця набуває найпростішого вигляду

$$\begin{cases} \dot{E} = -E + P, \\ \sigma \dot{P} = -P + E S, \\ \varepsilon \dot{S} = (S_e - S) - E P, \end{cases} \quad (3)$$

що характеризується безрозмірним параметром зовнішнього впливу  $S_e$  та співвідношеннями характерних часів  $\sigma \equiv \tau_P/\tau_E, \varepsilon \equiv \tau_S/\tau_E$ .

Дослідження різних режимів поведінки системи (3) показує, що зміна поляризації  $P$ , яка є мікроскопічною величиною, протікає набагато швидше, чим зміна макроскопічних значень напруженості  $E$  та заселеності  $S$  [1]. Це дозволяє використати адиабатичне наближення  $\tau_P \ll \tau_E, \tau_S$ , у рамках якого можна знехтувати лівою частиною другого рівняння системи (3), де  $\sigma \ll 1$ . В результаті отримуємо зв'язок  $P = ES$ , який приводить до двопараметричної системи

$$\begin{cases} \dot{E} = -E(1 - S) + f_e, \\ \dot{S} = \varepsilon^{-1} [S_e - S(1 + E^2)]. \end{cases} \quad (4)$$

Тут ми ввели зовнішній вплив, сила якого

$$f_e = -\frac{\partial V_e}{\partial E} \quad (5)$$

визначається потенціалом  $V_e$ . У відповідності із рецептом теорії катастроф такий потенціал задається трьома типами універсальних деформацій [14]. У загальному випадку можна записати

$$V_e = AE + \frac{B}{2}E^2 + \frac{C}{3}E^3 + \frac{D}{4}E^4 + \frac{F}{5}E^5, \quad (6)$$

де  $A, B, C, D, F$  — параметри теорії. Для складки маємо  $B = D = F = 0$ , а параметри  $A, C$  є довільними. У випадку збірки  $C = F = 0$ , а  $A, B, D$  можуть змінюватись. Нарешті, для ластівчиного хвоста маємо  $D = 0$ , а параметри  $A, B, C, F$  стають довільними.

За теоремою Хопфа лише наявність зовнішнього потенціалу може привести до біфуркації народження циклу [12]. При цьому стандартна процедура передписує покласти коефіцієнт при старшому степені рівним одиниці, що досягається вибором відповідних масштабів виміру. Однак, оскільки ми вже перейшли до одиниць (2), які забезпечують найпростішу форму системи Лоренца (3), то такий коефіцієнт повинен прийматися довільним.

### 3. Основні рівняння

Переходячи до дослідження можливих типів розв'язків системи, що самоорганізується в режим граничного циклу, викладемо основні положення алгоритму біфуркації народження циклу [12]. З цієї ціллю запишемо систему (4) в узагальненому вигляді

$$\begin{cases} \dot{E} = f^{(1)}(E, S), \\ \varepsilon \dot{S} = f^{(2)}(E, S), \end{cases} \quad (7)$$

де ефективні сили представляються виразами

$$f^{(1)}(E, S) \equiv -[A + (1 + B)E + CE^2 + DE^3 + FE^4] + ES, \quad (8)$$

$$f^{(2)}(E, S) \equiv S_e - S(1 + E^2).$$

Стационарні стани, що задаються умовами  $\dot{E} = 0, \dot{S} = 0$ , визначаються рівняннями

$$\begin{aligned} (1 + E_0^2) [A + (1 + B)E_0 + CE_0^2 + DE_0^3 + FE_0^4] &= E_0 S_e, \\ S_0 &= S_e (1 + E_0^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Динаміка процесу, що самоорганізується поблизу вказаних стаціонарних точок, визначається власними значеннями  $\lambda$  та вектором  $\vec{V}$  матриці Якобі

$$M_{ij} \equiv \left( \frac{\partial f^{(i)}}{\partial x_j} \right)_{x_j = x_{j0}}; \quad x_j \equiv \{E, S\}, \quad i, j = 1, \quad (10)$$

де індекс 0 визначає стаціонарний стан. Підстановка сил (8) в означення (10) приводить до матричних елементів

$$M_{11} = -M_0 + S_0, \quad (11)$$

$$M_0 \equiv (1 + B) + 2CE_0 + 3DE_0^2 + 4FE_0^3;$$

$$M_{12} = E_0; \quad M_{21} = -2\varepsilon^{-1} S_0 E_0; \quad (12)$$

$$M_{22} = -\varepsilon^{-1} (1 + E_0^2).$$

Тоді рівняння на власні значення та вектори

$$\sum_j M_{ij} V_j = \Lambda V_i \quad (13)$$

дає вирази для показника Ляпунова  $\Lambda$ , інкременту  $\lambda$  та власної частоти  $\omega_0$ :

$$\Lambda \equiv \lambda \pm i\omega_0;$$

$$\lambda = \frac{1}{2} [(S_0 - M_0) - \varepsilon^{-1} (1 + E_0^2)],$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \sqrt{8\varepsilon^{-1} S_0 E_0^2 - [(S_0 - M_0) + \varepsilon^{-1} (1 + E_0^2)]^2}. \quad (14)$$

Стационарна точка  $E_0, S_0$  є нестійкою за умови  $\lambda \geq 0$ , яка приводить до виразу

$$\varepsilon(S_0 - M_0) \geq 1 + E_0^2. \quad (15)$$

Відповідно характерна частота існує, якщо

$$8\varepsilon S_0 E_0^2 \geq [\varepsilon(S_0 - M_0) + (1 + E_0^2)]^2. \quad (16)$$

Для визначення умови стійкості граничного циклу потрібно переписати рівняння руху (7) відраховуючи

змінні  $E$ ,  $S$  від стаціонарних значень  $E_0$ ,  $S_0$ . Це досягається на основі перетворення

$$\vec{X} = \vec{X}_0 + P \cdot \vec{\delta}, \quad (17)$$

де використані псевдовекторні позначення

$$\vec{X} \equiv \begin{pmatrix} E \\ S \end{pmatrix}, \quad \vec{\delta} \equiv \begin{pmatrix} E - E_0 \\ S - S_0 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

а матриця перетворення

$$P \equiv \begin{pmatrix} \Re V_1 & -\Im V_1 \\ \Re V_2 & -\Im V_2 \end{pmatrix} \quad (19)$$

будується із компонент власного вектора

$$\vec{V} \equiv \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Вибираючи першу з них у найпростішому вигляді  $V_1 \equiv 1$ , із рівняння (13), де власна частота  $\omega_0$  має обчислюватися у точці біфуркації  $\lambda = 0$ , для другої компоненти знаходимо

$$V_2 = \frac{(M_0 - S_0) + i\omega_c}{E_0}, \quad (21)$$

$$\omega_c \equiv \omega_0|_{\lambda=0} = (1 + E_0^2) \left[ \frac{2S_e E_0^2}{(1 + E_0^2)^3} - 1 \right]^{1/2}.$$

Тоді матриця перетворення (19) має вигляд

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (M_0 - S_0)/E_0 & -\omega_c/E_0 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

В результаті рівняння руху приймають канонічну форму

$$\dot{\vec{\delta}} = \vec{F}, \quad \vec{F} \equiv P^{-1} \vec{f}, \quad (23)$$

де псевдовектор канонічної сили

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F^{(1)} \\ F^{(2)} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f^{(1)} - f_0^{(1)} \\ f^{(2)} - f_0^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (24)$$

який задовольняє умові [12]

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{\delta}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_c \\ \omega_c & 0 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

здобуває компоненти

$$F^{(1)} = f^{(1)}, \quad F^{(2)} = \alpha f^{(1)} - \beta \varepsilon f^{(2)}; \quad (26)$$

$$\alpha \equiv \frac{M_0 - S_0}{\omega_c}, \quad \beta \equiv \frac{E_0}{\varepsilon \omega_c}. \quad (27)$$

Стійкість граничного циклу визначається умовою  $\Re \Phi < 0$  для показника Флоке [12]

$$\Phi = \frac{i}{2\omega_0} \left( g_{11} g_{20} - 2|g_{11}|^2 - \frac{1}{3}|g_{02}|^2 \right) + \frac{1}{2} g_{21}, \quad (28)$$

узятого у точці біфуркації. Тут структурні константи визначаються похідними за змінними  $E$ ,  $S$ , що вказані відповідними індексами:

$$g_{11} = \frac{1}{4} \left[ \left( F_{EE}^{(1)} + F_{SS}^{(1)} \right) + i \left( F_{EE}^{(2)} + F_{SS}^{(2)} \right) \right], \quad (29)$$

$$\begin{pmatrix} g_{02} \\ g_{20} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \left[ \left( F_{EE}^{(1)} - F_{SS}^{(1)} \mp 2F_{ES}^{(2)} \right) + i \left( F_{EE}^{(2)} - F_{SS}^{(2)} \pm 2F_{ES}^{(1)} \right) \right], \quad (30)$$

$$g_{21} = \frac{1}{8} \left\{ \left[ \left( F_{EEE}^{(1)} + F_{ESS}^{(1)} \right) + \left( F_{EES}^{(2)} + F_{SSS}^{(2)} \right) \right] + i \left[ \left( F_{EEE}^{(2)} + F_{ESS}^{(2)} \right) - \left( F_{EES}^{(1)} + F_{SSS}^{(1)} \right) \right] \right\}. \quad (31)$$

Підставляючи сюди вирази (26), (8), знаходимо

$$g_{11} = -\frac{1}{2} [\gamma + i(\alpha\gamma - \beta S_0)], \quad \gamma \equiv C + 3DE_0 + 6FE_0^2; \quad (32)$$

$$\begin{pmatrix} g_{02} \\ g_{20} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \left\{ [\gamma \pm (\alpha + 2\beta E_0)] + i[\mp 1 + (\alpha\gamma - \beta S_0)] \right\}; \quad (33)$$

$$g_{21} = \frac{1}{4} [\beta - 3(1 - i\alpha)(D + 4E_0)]. \quad (34)$$

Тоді показник Флоке (28) дає умову стійкості граничного циклу:

$$(\alpha\gamma - \beta S_0)(\alpha + 2\beta E_0 - 2\gamma) \leq \gamma + \omega_c [3(D + 4FE_0) - \beta]. \quad (35)$$

#### 4. Універсальна деформація складки

У найпростішому випадку універсальної деформації складки слід покласти  $\gamma = C$ ,  $M_0 = 1 + 2CE_0^2$  у співвідношеннях (15), (16), а (35) набуває вигляду

$$(\alpha C - \beta S_0)(\alpha + 2\beta E_0 - 2C) \leq C - \beta\omega_c. \quad (36)$$

Тоді система (9) приводить до стаціонарних значень напруженості  $E_0$  та інверсної заселеності  $S_0$ , характерний вид залежності яких від зовнішнього впливу  $S_e$  подано на рис.1.

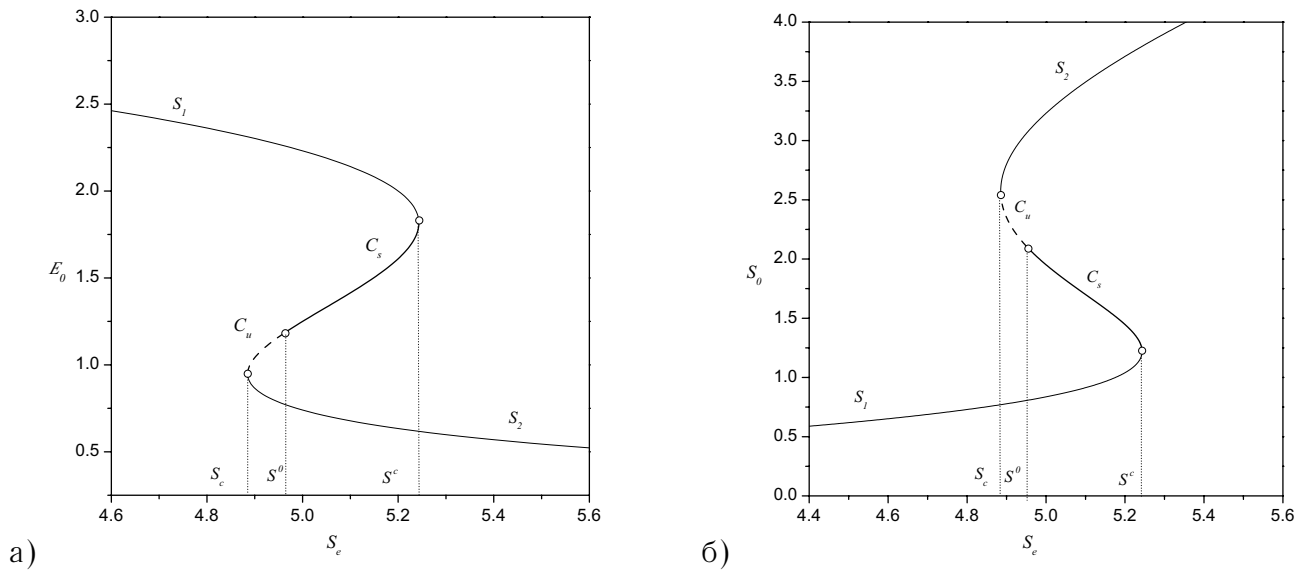


Рис. 1 Залежності стаціонарних значень напруженості  $E_0$  (а) та інверсної заселеності  $S_0$  (б) від накачки  $S_e$  при  $A = 1.9$ ,  $C = -0.455$ .

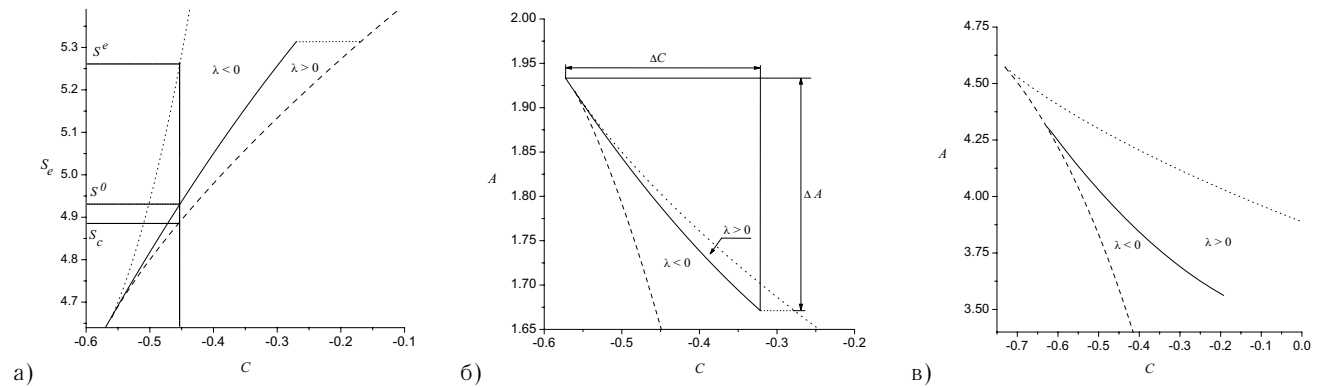


Рис. 2 Фазові діаграми системи при: а)  $A = 1.9$ ; б)  $S_e = 4.7$ ; в)  $S_e = 9.6$ .

Обидві з наведених залежностей проявляють характерну нестійкість  $S$ -типу із тією відмінністю, що перша спостерігається на спадаючій ділянці залежності  $E_0(S_e)$ , тоді як друга — на зростаючій ділянці  $S_0(S_e)$ . Згідно біфуркаційним діаграмам, поданим на рис.1, при докритичних ступенях накачки ( $S_e < S_c$ ) фазовий портрет має єдине сідло  $S_1$ , якому відповідають тонкі лінії на рис.1. Із перевищенням нижнього критичного значення  $S_c$  відбувається звичайна біфуркація подвоєння, внаслідок якої з'являється фокус  $C_u$ , зображений товстими лініями, та нове сідло  $S_2$  (тонкі лінії). В інтервалі  $S_c < S_e < S^0$  інкремент має позитивне значення  $\lambda > 0$ , що вказує на нестійкість фокуса  $C_u$ , положення якого зображено штриховими лініями. При проміжному значенні  $S_e = S^0$  інкремент набуває значення  $\lambda = 0$ , у результаті чого фокус трансформується із нестійкого  $C_u$  у стійкий  $C_s$ . В інтервалі  $S^0 < S_e < S^c$  маємо  $\lambda < 0$ , так що фокус  $C_s$  зберігає свій притягуючий характер, а при  $S_e > S^c$  відбувається зворотня біфуркація, яка приво-

дить до анігіляції фокуса та сідла  $S_1$ .

Особливість розглянутого випадку універсальної деформації складки полягає у її виродженому характері — при критичному значенні накачки  $S_e = S^0$  відбувається не лише трансформація знака інкременту  $\lambda$ , але й занулення показника Флоке (28). Характерно, що у даному випадку зазначена умова виконується не у кінцевій області параметра накачки, а при єдиному значенні  $S_e = S^0$ . Ця обставина демонструється фазовими діаграмами, поданими на рис.2, з якого видно, що умови  $\lambda = 0$ ,  $\Re\Phi = 0$  реалізуються на суцільній лінії, яка змінює свою довжину залежно від параметрів  $S_e$ ,  $A$ ,  $C$ , останній з яких повинен набувати від'ємних значень. Як показує порівняння рис.2а, 2б, 2в, при сталих значеннях  $A$  зростання  $C$  приводить до розширення області біфуркації подвоєння, обмеженої штриховою та пунктирною лініями, хоча при певному значенні суцільна лінія біфуркації Хопфа переривається. Із підвищенням параметра зовнішнього впливу  $S_e$  відбувається

розширення області бифуркації подвоєння і видовження лінії бифуркації Хопфа (пор. рис.2б та рис.2в).

Рисунок 3 показує, що зі зростанням параметра на качки  $S_e$  довжини  $\Delta A$ ,  $\Delta C$  суцільної лінії вздовж осей зміни параметрів  $A$ ,  $C$ , при яких виконується умова бифуркації Хопфа, монотонно зростають, приймаючи ненульові значення при  $S_e > 3.705$ .

Розглянемо тепер явний вигляд фазових портретів у різних областях фазової діаграми, поданих на рис.2. Напростішу форму вони набувають у докритичній ( $S_e < S_c$ ) і закритичній ( $S_e > S_c$ ) областях: як видно з рис.4, обидві указані області характеризуються наявністю єдиного сідла, що відповідає великим значенням напруженості  $E_0$  у першому випадку і малим  $E_0$  у другому (при цьому стаціонарне значення інверсної заселеності  $S_0$  у першому випадку є малим, а у другому великим). Більш складною є картина при потраплянні в область, що обмежена штриховою та пунктирною лініями на рис.2. У порівнянні з рис.4 тут з'являються додаткове сідло і фокус, який в області позитивних значень  $\lambda$  є відштовхуючим, а при  $\lambda < 0$  — притягуючим (рис.4).

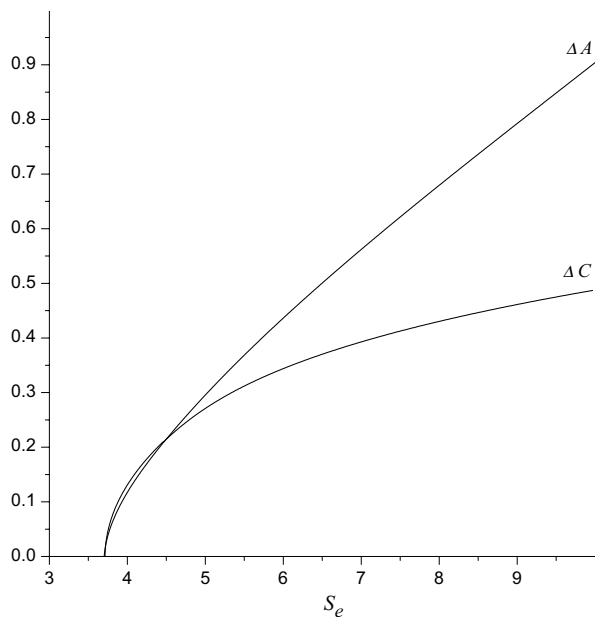


Рис. 3 Довжини осей зміни параметрів  $A$ ,  $C$ , при яких виконується умова бифуркації Хопфа.

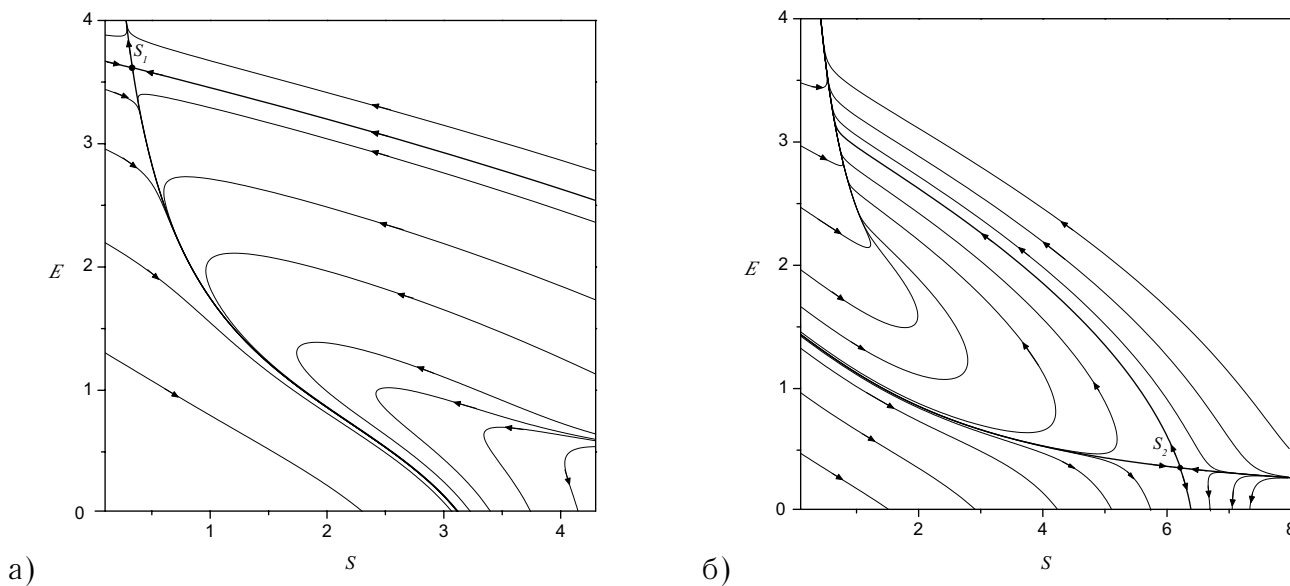


Рис. 4 Фазові портрети у докритичній (а) і закритичній (б) областях фазової діаграми.

Найбільш цікава ситуація реалізується за умов  $\lambda = 0$ ,  $\Re\Phi = 0$ , що відповідають суцільній лінії на рис.2. Тут фокус  $C$  стає виродженим, так що фазові траєкторії поблизу нього приймають вигляд концентричних замкнених еліпсів (див. рис.5). У певному сенсі про цей випадок можна говорити, як про наявність набору граничних циклів. Для демонстрації цього факту ми подаємо вигляд таких циклів, використовуючи зростаючі масштаби. Із рис.6б видно, що перехід до таких масштабів не змінює картину граничного циклу, а лише зменшує

область зміни змінних  $E$  і  $S$ .

До цього часу нами було розглянуто випадок співвимірності часових масштабів еволюції параметра порядку та керуючого параметра ( $\varepsilon = 1$ ). Проте, у багатьох випадках реалізується ситуація, коли у системі виділяється одна найповільніша мода. Це означає, що при дослідженні систем, якнайбільш наближених до реальних умов слід покласти  $\varepsilon \leq 1$ . Проведений аналіз показав, що стійкий граничний цикл у системі можливий не при всіх значеннях

ннях безрозмірного часу релаксації  $\varepsilon$  (див.рис.7).

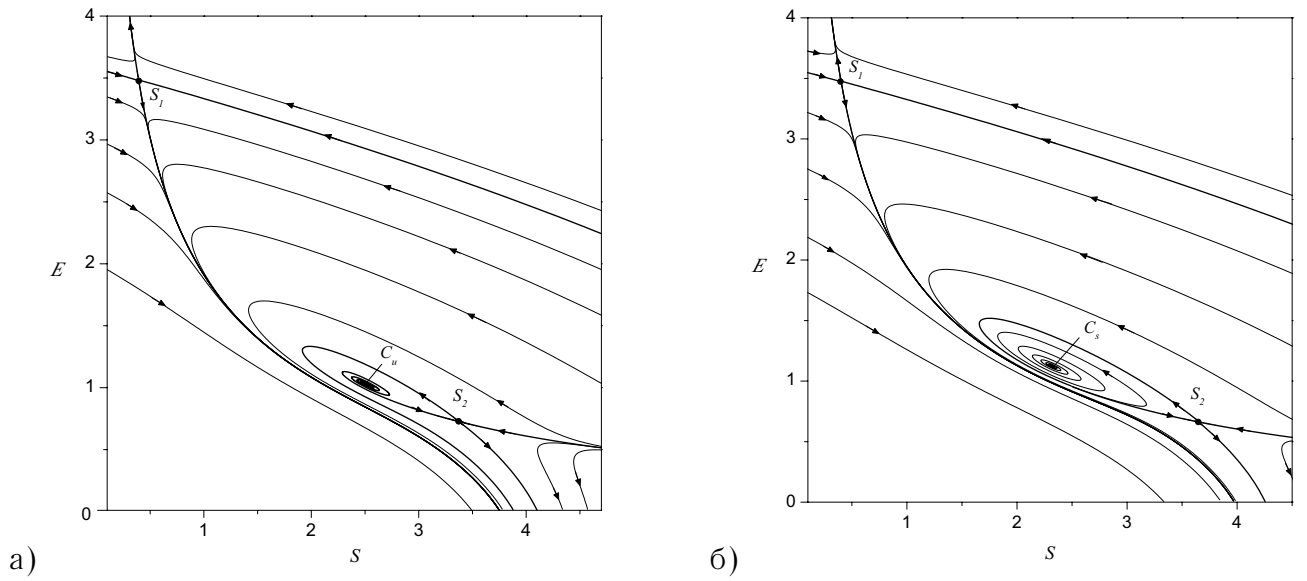


Рис. 5 Фазові портрети системи в областях нестійкого (а:  $A = 1.9$ ,  $C = -0.33$ ,  $S_e = 5.1$ ) та стійкого (б:  $A = 1.9$ ,  $C = -0.33$ ,  $S_e = 5.2$ ) фокусів.

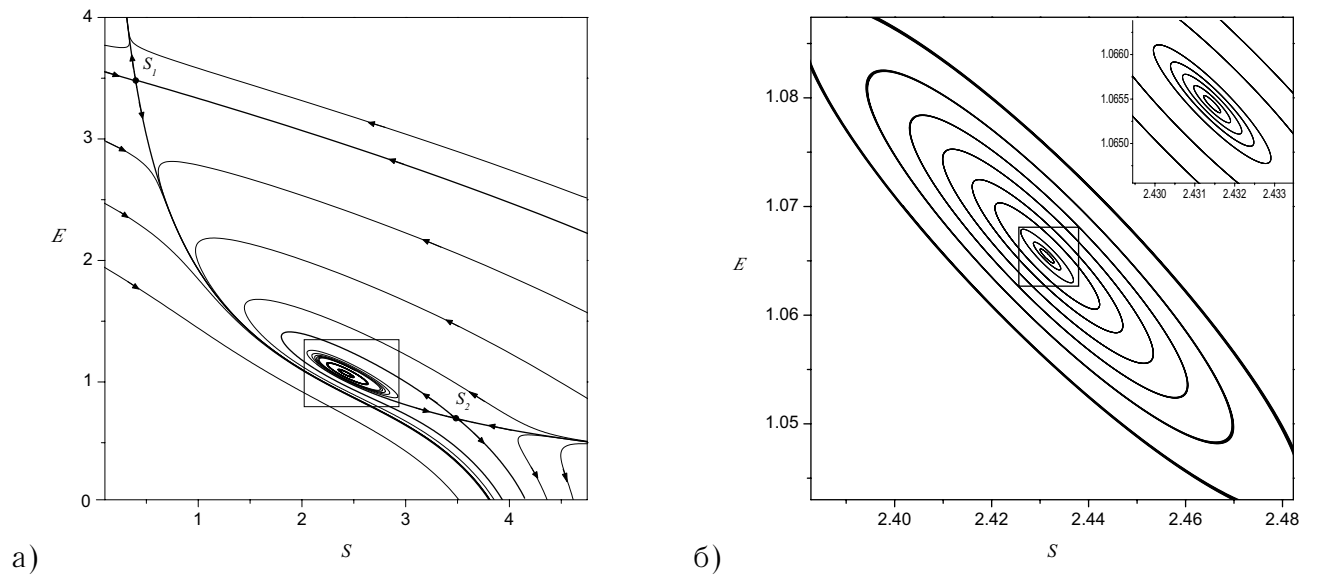


Рис. 6 Вигляд фазового портрету на лінії біфуркації Хопфа ( $A = 1.9$ ,  $C = -0.33025$ ,  $S_e = 5.19152$ ) у звичайному (а) та збільшеному (б) масштабах.

На залежності  $A(\varepsilon)$  чітко простежується інтервал  $\varepsilon$ , у якому стає можливим виникнення періодичного випромінювання (лінії на рис.7 є обмеженими за довжиною). Окрім того, порівнюючи криві 1–7 можна бачити, що із підвищенням значення інтенсивності  $C$  нелінійності модулятора добротності інтервал для  $\varepsilon \simeq 1$ , що відповідає стійкому періодичному випромінюванню зменшується (суцільна лінія), при цьому розширюється область нестійкого випромінювання (пунктирна лінія).

При певному значенні  $C$  (наприклад, лінія 4) система може зазнавати лише нестійкого періодичного випромінювання. При переході до позитивних значень  $C$  область існування стійкого періодичного випромінювання реалізується лише при  $\varepsilon \simeq 10^{-1} \div 10^{-2}$ , що означає самоорганізацію системи до коливного руху лише при підпорядкуванні всієї динаміки одній повільній моді — напруженості електричного поля.

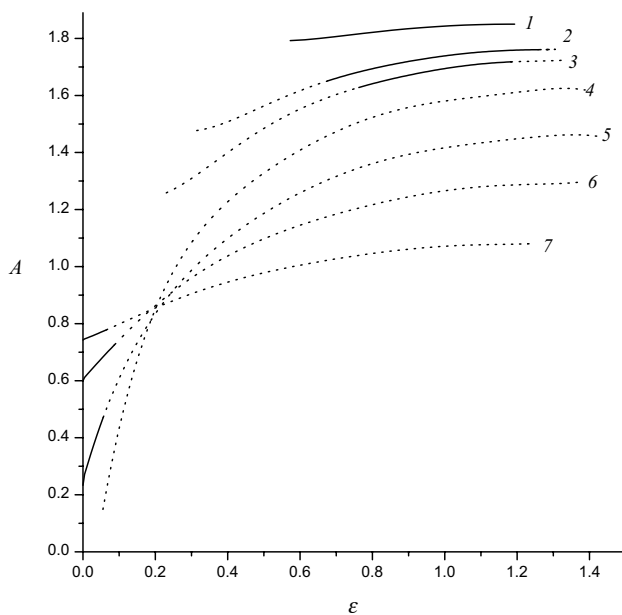


Рис. 7 Фазова діаграма виникнення періодичного випромінювання (пунктирні лінії визначають нестійкий граничний цикл, суцільні — множини стійких циклів) при  $S_e = 4.7$ , криві 1—7 відповідають  $C = -0.5, -0.4, -0.35, -0.2, 0.1, 0.5, 1.2$ .

### 5. Заключення

Ми розглянули найпростіший випадок універсальної деформації складки, який реалізується лише за умови  $C < 0$ , що означає необмежене зростання напруженості та інверсної заселеності при потраплянні в область великих значень  $E, S$ . У такому сенсі розглянута система є глобально нестійкою. Однак, при значеннях  $S_e, A, C$ , визначених фазовою діаграмою на рис.2, може проявлятися локальна стійкість, характер якої визначається умовами існування притягуючого фокусу (рис.4а). Зі зміною параметрів  $A, C$  та  $S_e$  зазначений фокус трансформується у відштовхуючий так, що у точці біфуркації Хопфа реалізується сім'я вироджених фазових траєкторій типу граничного циклу.

Характерна особливість універсальної деформації складки полягає у тому, що граничний цикл має вироджений характер. З фізичної точки зору це означає, що у розглянутому випадку автохвильовий режим модуляції випромінювання може виникати тільки при жорстко фіксованому виборі параметрів лазера. При цьому зміна початкових значень напруженості випромінювання і інверсної заселеності суттєво змінює їх поточні значення, утримуючи постійною частоту модуляції.

Оскільки обмежений об'єм публікації дозволив викласти лише випадок деформації складки, то очевидна перспектива продовження роботи полягає у дослідженні універсальних деформацій зборки і ластівчиного хвоста. Можна очікувати, що розширення набору параметрів зазначених моделей приведе до виникнення кінце-

вої області існування стійкого граничного циклу.

На завершення зазначимо, що одержані результати можуть знайти безпосереднє застосування при дослідженні систем, що самоорганізуються при інтенсивному зовнішньому навантаженні за умов нелінійної кінетики (біологічні, соціально-економічні системи та ін.).

1. Г.Хакен. Синергетика. — Москва: Мир, 1980.
2. В.Й. Сугаков. Основи синергетики. — Київ: Обереги, 2001.
3. А.И. Олемской, А.А. Кацнельсон. Синергетика конденсированной среды. — Москва: УРСС, 2003.
4. А.И. Олемской, А.В. Хоменко, ЖЭТФ, **110**: 2144 (1996).
5. Г. Хакен. Синергетика. Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — Москва: Мир, 1985.
6. Г. Шустер. Детерминированный хаос. — Москва: Мир, 1979.
7. В.С. Анищенко, Т.Е. Вадивасова, В.В. Астахов. Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. — Саратов: Изд-во Саратовского Ун-та, 1999.
8. Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. Современные проблемы нелинейной динамики. — Москва: Эдиториал УРСС, 2000.
9. П. Берже, И. Помо, К. Видаль. Порядок в хаосе (о детерминистском подходе к турбулентности). — Череповец: Меркурий Пресс, 2000.
10. А. Лихтенберг, М. Либман. Регулярная и стохастическая динамика. — Череповец: Меркурий Пресс, 2000.
11. Я.И. Ханин. Основы динамики лазеров. — Москва: Наука: Физматлит, 1999.
12. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. — Теория и приложения бифуркации рождения цикла. — Москва: Мир, 1985.
13. R. Lefever, I.Prigogine, J. Chem. Phys., **48**: 1695 (1968).
14. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. — Москва: Мир, 1980.
15. E. Lorenz, J. Atmosph. Sc., **20**: 1675 (1963).
16. A. I. Olemskoi, Physica A, 2002, v.310, pp. 223-233.

### САМООРГАНИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВОЙ СИСТЕМЫ ПО ТИПУ БИФУРКАЦИИ ХОПФА

А.И.Олемской, І.А.Шуда, В.О.Харченко

#### Резюме

Рассмотрена самоорганизация синергетической системы, возмущенной универсальной деформацией складки. Показано, что при специальном выборе параметров неустойчивости системы возможным становится образование устойчивых состояний вследствие бифуркации Хопфа, результатом которой является образование вырожденных устойчивых предельных циклов. Получены соответствующие бифуркационные и фазовые диаграммы. Выявлены условия образования устойчивого и неустойчивого фокусов.

### SELF-ORGANIZATION OF UNSTABLE SYSTEM BY THE HOPF BIFURCATION SCENARIO

A.I.Olemskoi, I.A.Shuda, V.O.Kharchenko

#### Summary

Self-organization of synergetic system under perturbations given by the



universal pleat type deformation is considered. It is shown, that stable states type of degenerated limited cycles are realized due to the Hopf bifurcation under special conditions for system parameters. Correspondi-

ng bifurcation and phase diagrams are obtained. Conditions of formation stable and unstable focuses are displayed.